Chapitre 9 : Systèmes Linéaires

Systèmes linéaires sans paramètre

Exercice 1 : Déterminer le rang et résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \\ 4x & - & y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 2 \\ x & - & y & - & z & - & t & = & 3 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & - & u & - & v & = & 0 \\ x & - & y & - & z & - & u & + & 2v & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0. \end{array}\right.$

Systèmes linéaires avec paramètre

Exercice 2 : Discuter les solutions dans $\mathbb{R}$ des systèmes suivants en fonction des paramètres $m \in \mathbb{R}$ ou $r \in \mathbb{R}$:

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ mx & + & (m+1)y & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & - & m^2z & = & 1-m \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcr} (m-1)x & - & my & = & m \\ (m+1)x & + & (m+1)y & = & m^2-1 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & m^2 \\ mx & + & y & = & m^2 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcrcr} y & + & z & = & rx \\ x & + & z & = & ry \\ x & + & y & = & rz \end{array}\right.$

Divers

Exercice 3 : Soit la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, 5x+3y). \end{array}$$

Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'expression de sa réciproque.

Exercice 4 : Équilibrer la réaction chimique suivante :

$$H_2SO_3 + HBrO_3 \to H_2SO_4 + Br_2 + H_2O.$$

Exercice 5 : La somme des carrés.

1. Trouver un polynôme de degré 3 tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$.
2. Retrouver alors l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 6 : On considère les points $A = (1, 2, -1)$ et $B = (-2, 4, 0)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de (AB).
2. En fonction de $m \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de (AB) avec la droite $\mathcal{D}_m$ représentée paramétriquement par

$$\left\{\begin{array}{l} x = s+3 \\ y = -2s+2 \\ z = 2s+m \end{array}\right. ; \quad s \in \mathbb{R}.$$