
Programme de colle BCPST 1

Semaine 26 : du 01/06/26 au 05/06/26

Chapitre 21 : Applications linéaires

1. Définition, premières propriétés, opérations.
2. Noyau, image d'une application linéaire : définition, lien avec l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.
3. Matrices et applications linéaires : les différents liens (avec une combinaison linéaire d'applications, avec une composée d'applications, avec une application linéaire bijective)
4. Rang d'une application linéaire : définition, propriété, théorème du rang et conséquences.
5. Changement de base : matrices de passage (définition et propriétés).

Chapitre 22 : Intégration

1. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
2. Propriétés de l'intégrale.
 - Relation de Chasles, exemples.
 - Linéarité, exemples.
 - Intégrales et inégalités : théorème de positivité, de croissance, de stricte positivité. Exemples en particulier pour l'étude des suites définies par une intégrale.
 - Intégrale et valeur absolue, exemple.
 - Notion de valeur moyenne.
 - Fonction définie par une intégrale. Exemple d'étude de telles fonctions.
3. Méthodes de calcul d'intégrales
 - Intégration par parties, exemples.
 - Changement de variable, exemples.
 - Exemples classiques avec les fonctions trigonométriques.
4. Sommes de Riemann.

Questions de cours

- Énoncer et démontrer la propriété qui relie bijectivité d'une application linéaire et inversibilité de la matrice associée.
- Montrer que si u est une AL d'un ev E vers un ev H de même dimension, il suffit de trouver v tel que $v \circ u = \text{id}_E$ ou telle que $u \circ v = \text{id}_H$ pour montrer que u est bijective de bijection réciproque v .
- Énoncer et démontrer les propriétés des matrices de passage.
- Démonstration du théorème de positivité de l'intégrale (à partir de la définition $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, avec F une primitive de f).
- Démonstration du théorème : si f est positive sur un segment et non nulle en au moins un point de ce segment, alors son intégrale (avec les bornes dans l'ordre croissant) est strictement positive. (démonstration à savoir faire dans le cas d'un point intérieur).
- Inégalité triangulaire de l'intégrale.
- Démonstration du fait que toute fonction continue sur un segment atteint sa valeur moyenne.
- Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et non nulle telle que : $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$ où $f^2 = f \times f$. Montrer que $f = 1$.
- Énoncé et démonstration de la propriété de changement de variable.
- Énoncé et démonstration de la propriété d'intégration par parties.